$B_{p,\chi}$ の p 進付値

石井 竣

2025 年 3 月 5 日作成, 同年 10 月 1 日修正

1 導入

本文を通じて K を類数 1 の虚二次体, その判別式の絶対値を d, 付随する二次 Dirichlet 指標を χ と書く. これらに付随して**一般化** *Bernoulli* **数** $B_{n,\chi}$ が

$$\sum_{a=1}^{d} \frac{\chi(a)te^{at}}{e^{dt}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n,\chi}}{n!} t^n$$

で定義される [5, Chapter 4, p.31]. 例えば $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の時, 左辺は

$$\sum_{a=1,3} \frac{\chi(a)te^{at}}{e^{4t}-1} = \frac{t(e^t - e^{3t})}{e^{4t}-1} = \frac{-te^t}{e^{2t}+1} = \frac{-t}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} t^n$$

と計算される. ここに E_n は **Euler 数**と呼ばれる整数で, (hyperbolic) secant 関数の Taylor 展開の係数により定義される (と `https://mathworld.wolfram.com/EulerNumber.html` にあった). よって $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の時には

$$B_{n,\chi} = -\frac{E_{n-1}}{2}$$

であるから $2B_{n,\chi}$ も整数である. 実際, Sagemath を用いて小さい n に対して組 $(2n-1, 2B_{2n-1,\chi} = -E_{2n})$ を計算してみた結果が下記の表である:

```
[5]: G = DirichletGroup(4)
     x = G.0
     for n in range(1,20):
         print(2*n-1, (2*x.bernoulli(2*n-1)).factor())
```

```
1 -1
3 3
5 (-1) * 5^2
7 7 * 61
9 (-1) * 3^2 * 5 * 277
11 11 * 19 * 2659
13 (-1) * 5 * 13^2 * 43 * 967
15 3 * 5 * 47 * 4241723
17 (-1) * 5 * 17^2 * 228135437
19 19 * 79 * 349 * 87224971
21 (-1) * 3 * 5^2 * 7 * 41737 * 354957173
23 23 * 31 * 1567103 * 1427513357
25 (-1) * 5^3 * 13 * 2137 * 111691689741601
27 3^3 * 67 * 61001082228255580483
29 (-1) * 5 * 19 * 29^2 * 71 * 30211 * 2717447 * 77980901
31 31 * 15669721 * 28178159218598921101
33 (-1) * 3 * 5 * 11 * 17 * 930157 * 42737921 * 52536026741617
35 5 * 7 * 4153 * 8429689 * 2305820097576334676593
37 (-1) * 5 * 13 * 37^2 * 9257 * 73026287 * 25355088490684770871
```

この表を眺めると, 素数 p が 4 を法として 1 に等しいならば $B_{p,\chi}$ が p^2 で割れることが推測できる. 実際, この推測は Carlitz によって証明されている:

Theorem 1.1 ([1, Theorem 1])**.**
虚二次体 K で分裂する素数 p について $B_{p,\chi} = 0 \bmod p^2$ が成立する.

ここで $B_{p,\chi} = 0 \bmod p^3$ となるような (K で分裂する) 素数を探索してみる. 同様に Sagemath を用いて計算してみたところ, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の時には $p = 29789$ が, また $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の時には $p = 13, 181, 2521$ が見つかった. (なお $2B_{29789,\chi}$ はとても大きく計算機での取り扱いには注意を要する).

ところで, 素数 29789 は次のような性質を持っていることも観察できる: $p = 29789$ は $4n + 1$ 型の素数であるから, ある $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ の素元 π とその複素共役を用いて $p = \pi\bar{\pi}$ と書ける. 例えば $\pi = 110 + 133\sqrt{-1}$ とする. この時, $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]/(\pi) \cong \mathbb{F}_p$ と Fermat の小定理から, いわゆる Fermat 商 $\frac{a^{p-1}-1}{p}$ に類似した形の数

$$\frac{\bar{\pi}^{p-1} - 1}{\pi} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$$

の整性が従う. そして素数 $p = 29789$ は $\frac{\bar{\pi}^{p-1}-1}{\pi} = 0 \bmod \pi$ を満たしている[1]. なお, この性質を満たす $4n + 1$ 型の素数は $p < 10^7$ の範囲でこれのみである.

この奇妙な一致は $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の場合にも確かめることができる. 即ち素数 $p = 13, 181, 2521$ も同様に, 上記の "Fermat 商型" の数が素元 π で割り切れる. このことから次の仮説を立てる:

$$\boxed{\text{素数 } p \geq 5 \text{ が } K \text{ で分裂するならば, } B_{p,\chi} = 0 \bmod p^3 \Leftrightarrow \frac{\bar{\pi}^{p-1}-1}{\pi} = 0 \bmod \pi.}$$

次節においてこの同値を証明する[2].

2 証明

証明には Kubota-Leopoldt の p 進 L 関数 $L_p(s, \chi\omega)$ の性質を用いる (ここに ω は Teichmüller 指標). 素数 p が K で split している (i.e. $\chi(p) = 1$) こと, 及び $L_p(s, \chi\omega)$ の補完性質 [5, Theorem 5.11] によって等式

$$L_p(0, \chi\omega) = 0 \quad \text{及び} \quad L_p(1-p, \chi\omega) = -(1 - p^{p-1})\frac{B_{p,\chi}}{p}$$

が成立する. p 進 L 関数 $L_p(s, \chi\omega)$ を $s = 1$ の周りで展開した

$$L_p(s, \chi\omega) = a_0 + a_1(s-1) + a_2(s-1)^2 + \cdots$$

は任意の整数について収束する [5, Theorem 5.12] ほか, $a_i \in \mathbb{Z}_p$ 及び $p \mid a_i$ $(i \geq 1)$ が成立する. 素数 p が少なくとも 5 以上ならば, 上記定理の証明をそのまま辿ることで次が従う:

Lemma 2.1. 上記の係数 a_i について, $i \geq 2$ ならば $p^2 \mid a_i$.

いま $s = 0$ は p 進 L 関数の零点であるから

$$a_0 = a_1 \bmod p^2$$

が従う. 一方で, 合同式 $B_{p,\chi} = 0 \bmod p^3$ は

$$L_p(1-p, \chi\omega) = a_0 + a_1(-p) + a_2(-p)^2 = a_0 = 0 \bmod p^2$$

と同値である. 従って, あとは

[1] この条件は $\mathfrak{p}$ 進対数関数を用いることで $\log_{\mathfrak{p}}(\bar{\pi}) = 0 \bmod p^2$ とも言い換えできる.

[2] 私はこの事実を明記した文献を知らないものの, 昔からよく知られている結果のようである. 1978 年の Ferrero-Washington の論文の末尾で既に同様の観察が行われている.

$$a_1 = 0 \bmod p^2 \Leftrightarrow \log_{\mathfrak{p}}(\bar{\pi}) = 0 \bmod p^2$$

を示せばよい. この同値性については, Gross-Koblitz の公式と Ferrero-Greenberg の公式を組み合わせることで p 進 L 関数の $s=0$ での微分値が

$$L_p'(0, \chi\omega) = a_1 - 2a_2 + 3a_3 - \cdots = \frac{4}{w}\log_{\mathfrak{p}}(\bar{\pi})$$

と表せることを用いる [2, Proposition 1 及び p.100 最下段]. ここで w は虚二次体 K に含まれる 1 の冪根の数を表す. 補題 2.1 より, 両辺を p^2 を法として考えることで

$$a_1 = \frac{4}{w}\log_{\mathfrak{p}}(\bar{\pi}) \bmod p^2$$

が成立する. よって望みの主張が示された.

3 余談

引き続き, 素数 p は K で分裂すると仮定する. 記号 Ω で K の p 外不分岐最大副 p 拡大体を表すと, Galois 群 $\mathrm{Gal}(\Omega/K)$ は階数 2 の副 p 自由群である [4, (10.7.13) Theorem]. 一方, 素数 p の上にある K の素点 $\mathfrak{p}$ を Ω に延長したものを固定すると, 付随して p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}_p}$ の最大副 p 商 $G_{\mathbb{Q}_p}^{(p)}$ からの準同型写像

$$G_{\mathbb{Q}_p}^{(p)} \to \mathrm{Gal}(\Omega/K)$$

が生じる. ところで副 p 群 $G_{\mathbb{Q}_p}^{(p)}$ も階数 2 の副 p 自由群である [4, (7.5.11) Theorem (i)]. 自然な問題として, この副有限群としては同型な二者間に生じた準同型が同型写像か[3]を考える. 実は, この写像が同型写像であることと,

$$\frac{\bar{\pi}^{p-1} - 1}{\pi} \neq 0 \bmod \pi$$

は同値である. 前節で証明したことから, 後者は

$$B_{p,\chi} \neq 0 \bmod p^3$$

とも同値. こうして Bernoulli 数 B_{p,χ_K} の p-非可除性は Galois 理論的な言い換えを持つ.

また, Hao-Parry は通常の正則素数の判定法の類似として次の定理を証明した:

Theorem 3.1 ([3, Theorem 1])**.** *K の p 次円分拡大体 $K(\zeta_p)$ の類数が p で割れないことと, p が正則であり, かつ $B_{1,\chi}, B_{3,\chi}, \ldots, B_{p-2,\chi}$ がいずれも p で割れないことは同値である.*

実は次の定理も示すことができる:

Theorem 3.2. *$K(\zeta_p)$ の p 外不分岐最大副 p 拡大を Ω_K^{cyc} で表す. 素点 $\mathfrak{p}$ の Ω_K^{cyc} への延長に付随する準同型写像*

$$G_{\mathbb{Q}_p(\zeta_p)}^{(p)} \to \mathrm{Gal}(\Omega_K^{\mathrm{cyc}}/K(\zeta_p))$$

が同型写像であることと, $B_2, B_4, \ldots, B_{p-3}$, $B_{1,\chi}, B_{3,\chi}, \ldots, B_{p-2,\chi}$ がいずれも p で割れず, しかも $B_{p,\chi}$ が p^3 で割れないことは同値である.

[3] 全射なら同型であることも比較的簡単に分かる.

Remark 3.3. 通常の正則性についても上記定理に類似した言い換えがある: 体 Ω^{cyc} で $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ の p 外不分岐最大副 p 拡大体を表すことにする．この時, 素数 $p>2$ が正則であることと, 素数 p の Ω^{cyc} への延長に付随して定まる準同型写像

$$G^{(p)}_{\mathbb{Q}_p(\zeta_p)} \to \mathrm{Gal}(\Omega^{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q}(\zeta_p))$$

が全射であることは同値である．この状況下で両辺の $\mathbb{F}_p$ 係数 1 次コホモロジーの次元を比べると, 右辺は左辺のちょうど半分 ($=\frac{p+1}{2}$) になっている．定理 3.2 が満たされる状況下においては, この "半分" にする写像は

$$\begin{tikzcd} G^{(p)}_{\mathbb{Q}_p(\zeta_p)} \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, two heads] & \mathrm{Gal}(\Omega^{\mathrm{cyc}}_K/K(\zeta_p)) \arrow[d, two heads] \\ & \mathrm{Gal}(\Omega^{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q}(\zeta_p)) \end{tikzcd}$$

のように持ち上がっていることが分かる．

最後に無責任な予想と注釈を述べて本文を終わりにする．

Conjecture 3.4. *K で分裂する素数 p で, $B_{p,\chi}$ が p^3 で割れないものは無限個存在する．*

Silverman は abc 予想を仮定して非 Wieferich 素数, 即ち

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} \not\equiv 0 \bmod p$$

を満たす素数の無限性を証明している．上記予想 3.4 で考える素数 p は Wieferich 素数とは少し異なり, 素数 p に応じて π とその共役 $\bar{\pi}$ が定まり, この間の合同式を満たすかどうかを考えている．現時点で筆者は abc 予想の成立が予想 3.4 を導くかも知らない．

References

[1] Leonard Carlitz. Arithmetic properties of generalized Bernoulli numbers. *J. Reine Angew. Math.*, 202:174–182, 1959.

[2] Bruce Ferrero and Ralph Greenberg. On the behavior of p-adic L-functions at $s=0$. *Invent. Math.*, 50(1):91–102, 1978/79.

[3] Fred H. Hao and Charles J. Parry. Generalized Bernoulli numbers and m-regular primes. *Math. Comp.*, 43(167):273–288, 1984.

[4] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields*, volume 323 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008.

[5] Lawrence C. Washington. *Introduction to cyclotomic fields*, volume 83 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.